www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

SESSION DE 1990

PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES ET ALGORITHMIQUE

Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, sous réserve des conditions définies dans la circulaire n° 86-228 du 28 juillet 1986

Il sera tenu compte de la clarté des démonstrations et de la présentation
Il est possible d'admettre les résultats d'une question pour en traiter une autre

PARTIE A

On définit une suite récurrente $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$x_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} = x_n + \cos(x_n).$$

1. Étudier l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + \cos(x)$: sens de variation ; limites, asymptotes et points d'inflexion éventuels du graphe. Déterminer les solutions de l'équation $f(x) = x$.

2. Étudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans le cas où $x_0 \in \left]-\frac{3\pi}{2}, +\frac{3\pi}{2}\right[$; en cas de convergence, préciser la limite.

3. On choisit $x_0 \in [0, +\pi]$ et on pose $y_n = \frac{\pi}{2} - x_n$; trouver un équivalent, quand n tend vers l'infini, de y_{n+1} en fonction de y_n.

4. On choisit $x_0 \in [0, +\pi]$; prouver que : $\forall n \in \mathbb{N} : |y_{n+1}| \leqslant \frac{1}{6} |y_n|^3$.

5. On pose $x_0 = 1{,}5$, $a = 10^t$ pour t entier naturel, et $x'_n = 2x_n$; trouver une valeur entière r telle que $|\pi - x'_r| \leqslant 10^{-a}$.

   Donner avec la précision maximale permise par votre calculatrice les valeurs numériques approchées de x'_0, x'_1, et x'_2.

PARTIE B

1. Donner le développement en série entière des applications : $x \longmapsto (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ et $x \longmapsto \text{Arcsin}(x)$ en précisant les rayons de convergence respectifs.

2. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs ; on suppose qu'il existe deux réels α et β, avec $\beta > 1$, tels que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{z_{n+1}}{z_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n^\beta}\right).$$

   a. Prouver la convergence de la série de terme général $b_n = \alpha \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + \ln\left(\frac{z_{n+1}}{z_n}\right)$ pour n entier naturel non nul.

   b. Prouver la convergence de la suite $(n^\alpha z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   c. Discuter en fonction du réel α la convergence de la série $\sum z_n$.

3. Étudier, pour $x = 1$, la convergence de la série entière de l'Arcsinus.

4. La série entière de l'Arcsinus est-elle uniformément convergente sur l'intervalle $[-1, +1]$?

5. On note $\text{Arcsin}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k X^{2k+1}$, $S_p(X) = \sum_{k=0}^{k=p} a_k X^{2k+1}$, et $R_p(X) = \sum_{k=p+1}^{\infty} a_k X^{2k+1}$ pour tout X de $[-1, +1]$ et tout entier naturel p ; on note $f_p(x) = x + S_p(\cos(x))$ pour tout x de $[0, \pi]$.

   a. Étudier la convergence simple de la suite d'applications $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sur $[0, \pi]$. Préciser sa limite.

   b. Étudier la convergence uniforme de la suite d'applications $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ sur $[0, \pi]$.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE C

Dans cette partie, on reprend les notations de la question B.5.

1. Montrer que toutes les dérivées d'ordre pair de l'application $\phi_k : x \mapsto (\cos(x))^{2k+1}$ $(k \in \mathbb{N})$ sont nulles en $\frac{\pi}{2}$.

2. Montrer que toutes les dérivées d'ordre impair de cette application ϕ_k sont nulles en $\frac{\pi}{2}$ jusqu'à l'ordre $2k - 1$ inclus pour $k \in \mathbb{N}^*$.

3. Pour $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, et $q \in \mathbb{N}$, prouver que la q-ième dérivée de ϕ_k, notée $\phi_k^{(q)}$, vérifie l'inégalité :

$$\sup_{\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}} |\phi_k^{(q)}(x)| \leq \frac{(k+1)^q}{2^{k-q}} \qquad \left(\sup_{\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}} \left|\phi_k^{(q)}(x)\right| \leq \frac{(k+1)^q}{2^{k-q}} \right)$$

(on pourra appliquer la formule de Leibniz à $\cos^{2k-1}(x) \cdot \cos^2(x)$ et raisonner par récurrence sur k).

4. Démontrer que pour tous les entiers naturels p et q, la série $\sum_{k \geq p+1} a_k \phi_k^{(q)}$ est normalement convergente sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, a_k étant défini en B.5.

5. Prouver que les $2p + 2$ premières dérivées, pour $p \in \mathbb{N}$, de $R_p(\cos(x))$ sont nulles en $\frac{\pi}{2}$.

6. Démontrer que : $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \{1, 2, \ldots, 2p + 2\} : f_p^{(q)}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

7. Pour p fixé dans $\mathbb{N}$, on définit la suite $(x_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$x_{p,0} = 1{,}5 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} : x_{p,n+1} = x_{p,n} + S_p(\cos(x_{p,n})) = f_p(x_{p,n}),$$

et la suite $(y_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ par $y_{p,n} = \frac{\pi}{2} - x_{p,n}$.

a. Montrer que $\lim_{n \to \infty} x_{p,n} = \frac{\pi}{2}$.

b. On pose $M_{2p+3} = \sup_{0 \leq x \leq \pi} |f_p^{(2p+3)}(x)|$; démontrer que :

$$\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq y_{p,n+1} \leq \frac{M_{2p+3}}{(2p+3)!} y_{p,n}^{2p+3}.$$

8. *a.* Calculer $y_{p,n+1}$ en fonction de $y_{p,n}$.

b. Donner un équivalent de $y_{p,n+1}$ en fonction de $y_{p,n}$ quand n tend vers l'infini.

c. Prouver que : $\forall (p, n) \in \mathbb{N}^2 : 0 \leq y_{p,n+1} \leq \frac{1}{2p+3} y_{p,n}^{2p+3}$.

9. Trouver un entier p_0 tel que $y_{p_0,10} \leq 10^{-a}$ avec $a = 10^9$.

10. Donner avec la précision maximale permise par votre calculatrice la valeur numérique approchée de $2x_{p_0,1}$.

PARTIE D

On se propose de minimiser le nombre de multiplications à effectuer pour calculer $\cos(x)$ à partir de sa série entière.

1. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $a_n = \ln\left(\dfrac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}}\right)$ et $b_n = a_{n+1} - a_n$.

   a. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge.

   b. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ converge.

   c. En déduire l'existence d'un réel α tel que : $n! \underset{n \to \infty}{\sim} \alpha\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.

   d. On pose $\psi_K(x) = 1 - \left(x + \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) + \dfrac{K}{x^2}$ pour $x \in]1, +\infty[$ et $K \in \mathbb{R}$.

   Calculer $\psi_K'(x)$ et $\psi_K''(x)$. En déduire le signe de $\psi_K(x)$ pour $K = \dfrac{1}{12}$ et $K = \dfrac{1}{48}$.

   e. Sachant que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$, prouver que $2,3 \leqslant \alpha \leqslant 2,7$.

   f. Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n! \geqslant 2,3\ \alpha\, n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$.

2. On pose $u(x) = 1 - \cos(x)$ pour x réel ; montrer que l'application u vérifie la relation :

   (I) $$\forall x \in \mathbb{R} : u(x) = 2\left(2 - u\left(\frac{x}{2}\right)\right) u\left(\frac{x}{2}\right).$$

3. On peut donc calculer $u(x)$ et $\cos(x)$ à partir de $u\left(\dfrac{x}{2^m}\right)$ en utilisant m fois la relation (I), pour $m \in \mathbb{N}^*$.

   a. Démontrer la relation suivante :

   (II) $$\forall x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right],\ \forall n \in \mathbb{N}^* : \left| u(x) - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leqslant \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

   b. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon \in]0, 1[$, et $x \in \left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$; déterminer en fonction de n, $\ln\dfrac{1}{\varepsilon}$ et $\ln(x)$ le plus petit entier naturel m tel que :

   $$\left| u\left(\frac{x}{2^m}\right) - \sum_{k=1}^{k=n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{2^{2mk}(2k)!} \right| \leqslant \varepsilon,$$

   obtenu par la relation (II). Montrer que l'on peut écrire $m \sim \dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{(2n+2)\ln(2)}$ quand ε tend vers 0, n et x étant fixés.

   c. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on choisit m et n dans $\mathbb{R}_+^*$ de manière à minimiser la somme $m + n$ tout en ayant $m(n+1) = \dfrac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{2\ln(2)}$; trouver un équivalent de m et de n en fonction de ε quand ε tend vers 0. Dans les mêmes conditions, si on pose $\varepsilon = 10^{-p}$ pour p entier naturel non nul, déterminer un équivalent de m et de n quand p tend vers l'infini.

Tournez la page S.V.P.

PARTIE E : ALGORITHMIQUE

On se propose d'étudier la distance entre la fonction factorielle et son approximation étudiée dans la partie D.1.*c*.

Soit l'application $n \in \mathbb{N} \dashrightarrow f_1(n) = n! \in \mathbb{N}$.

Soit l'application $n \in \mathbb{N} \dashrightarrow f_2(n) = \alpha\, n^{n+\frac{1}{2}}\, e^{-n} \in \mathbb{R}$
avec $\alpha = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$.

1. *a.* Écrire l'algorithme (codage en Pascal) permettant d'évaluer :

$$|f_1(n) - f_2(n)| \text{ pour } n \in [0,7]$$

Remarque :

On fabriquera une fonction *facto* à valeur entière.

On éditera les résultats sur trois colonnes :

- une colonne n ;
- une colonne distance absolue ;
- une colonne distance relative en %.

b. Peut-on calculer $n!$ de cette manière, pour toutes les valeurs de $n \in \mathbb{N}$? Pourquoi ?

2. On cherche à évaluer l'erreur obtenue avec $f_2(n)$ en posant :

$$n! = n^{n+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\, e^{-n}\,(1 + \varepsilon_n) \text{ avec } \varepsilon_n \to 0 \text{ quand } n \to \infty .$$

Nous admettrons que ε_n est équivalent à $\frac{\beta}{n}$.

Écrire l'algorithme (codage en Pascal) permettant d'évaluer une valeur approchée β_n de β.

Remarque :

- il est judicieux de remarquer que $\ln\left(1 + \frac{\beta}{n}\right) \sim \frac{\beta}{n}$;
- on considérera que la précision du calcul est atteinte lorsque : $|\beta_{i+1} - \beta_i| < 10^{-5}$;
- on éditera les résultats sous la forme d'une courbe représentative de la fonction $\beta = f(n)$, en utilisant les procédures de la bibliothèque graphique Modulog.

N.B. :

Procedure Deplace (x, y : real); {positionne curseur}

Procedure Trace (x, y : real); {trace-segment depuis position courante}

Procedure Point (x, y : real); {allume le point (x, y)}

Procedure X_Axe (Xorg, Yorg, GradX : real);

Procedure Y_Axe (Xorg, Yorg, GradX : real); {tracent les axes et les graduent avec le pas GradX}.

Remarque : Il manque les procédures : Initgraphique et Fenêtre_

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail